

A.704.

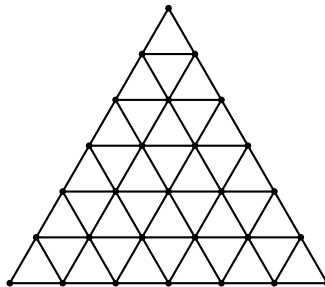
Schrettner Jakab

Szeged, Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium, 11. o. t.

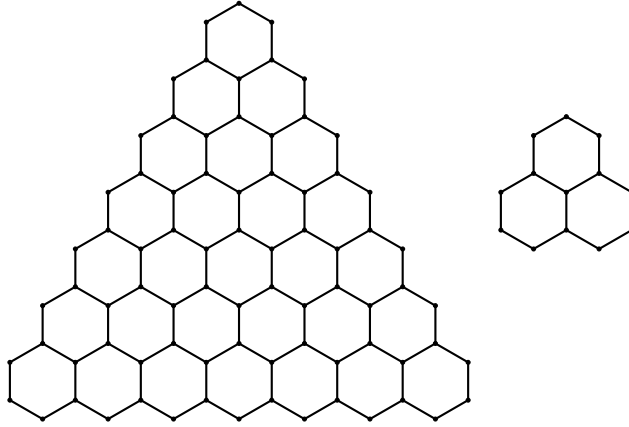
`sch.jakab@gmail.com`

Egy n hosszú oldalakkal rendelkező szabályos háromszög oldalainak n -edelőpontjain át behúztuk az oldalakkal párhuzamos egyenesek háromszögbe eső szakaszait. Tekintsük az így létrejövő $1 + 2 + \dots + (n + 1)$ darab metszéspont alkotta pontrácsot. Melyek azok az n pozitív egészek, melyekre ez a pontrács olyan ponthármasokba partícionálható, melyek egy-egy egységnyi oldalú szabályos háromszög csúcsai?

A kapott pontrács megfelelő ponthármasokba való partícionálását felfoghatjuk a következőképpen: adott egy szabályos hatszögrácson egy háromszög alakú tartomány, melyet minden oldalán $n + 1$ db hatszög határol. Ezt a tartományt kell lefednünk olyan háromszög alakú csempékkel, melyek minden oldalát 2 hatszög határolja. Például $n = 6$ -ra a háromszögben létrejövő pontrács:



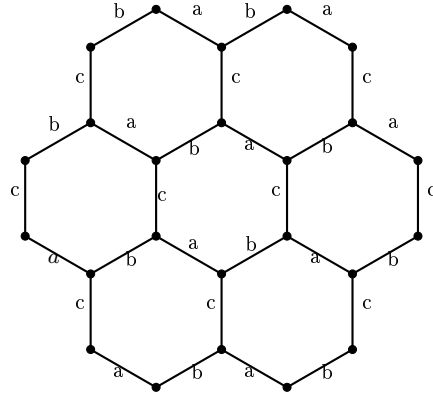
Míg az ehhez tartozó hatszögrácsbeli tartomány és a lefedéshez használt csempe:



Látható, hogy a hatszögrács elemi cellái megfeleltethetők a háromszögbeli rács rádspontjainak, és egy olyan ponthármas, melynek elemei egy szabályos háromszög csúcsai, éppen egy csempét adnak a hatszögrácson. Tehát a kérdés feltevése ekvivalens azzal, hogy egy ilyen háromszög alakú tartomány a hatszögrácson mikor fedhető le a jobb oldali csempékkel.

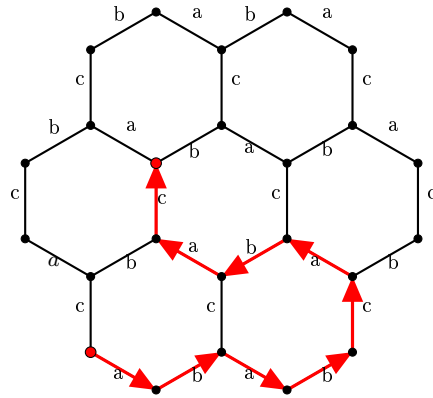
Jelölje T_k azt a tartományt a hatszögrácson, amely az $n = k - 1$ esetén kapott háromszögrácscsal feleltethető meg. Ez egy háromszöghöz hasonlító alakú tartomány, melyet minden oldalról k db hatszög határol (a fenti ábrán tehát a T_7 tartomány szerepel). A kérdésfelvetés tehát az, hogy T_k milyen k -ra fedhető le T_2 alakú csempékkel.

Helyezzünk egy hatszögrácsot a koordinátasíkra úgy, hogy minden elemi hatszögcella két szemközti éle legyen párhuzamos az x -tengellyel. Ezután jelöljük meg minden élt a hatszögrácsban az $\{a, b, c\}$ betűk valamelyikével a következőképpen: ha az él az x -tengellyel párhuzamos, akkor a -val jelöljük. Ha az él x -tengellyel bezárt, pozitív forgásirányban vett szöge 60° , akkor b , egyébként c lesz. A jelölés egy részlete:



Látható, hogy minden elemi hatszögnek 2-2 éle van az a, b, c betűkkel jelölve, és minden csúcsból egy a , egy b és egy c él indul ki.

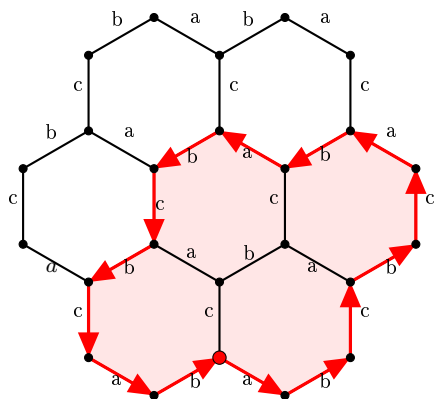
Ebben a hatszögrácson *útnak* hívunk egy $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ véges sorozatot, ahol e_i egy-egy irányított él, és e_i végpontja egybeesik e_{i+1} kezdőpontjával. Egy ilyen utat *zárt*nak nevezünk, ha e_1 kezdőpontja és e_m végpontja egybeesik. Speciális esetként útnak vesszük az üres utat, mely 0 db élből áll és zárt. Mivel minden csúcsból egy-egy él indul ki mindegyik féle élből, ezért egy adott kezdőpontú $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ utat megadhatunk egy $k_1 k_2 \dots k_m$ sorral, ahol $k_i \in \{a, b, c\}$. Például az $ababcbac$ sorhoz tartozó út:



Ez alapján definiáljuk a következőt: a $k_1 k_2 \dots k_m$ betűsört egy *szónak* nevezzük, ha minden $1 \leq i \leq m$ egészre $k_i \in \{a, b, c\}$. Speciális esetként szónak vesszük az üres szót is, amely 0 db betűből áll. A fentiek alapján egy szó olyan utakat ír le a rácson, melyek egy eltolással egymásba vihetők. Az üres szó egy üres utat jelöl.

A hatszögrácson rekurzívan definiáljuk a *tartományokat*: tartomány a rács minden elemi hatszögcellája, illetve bármely tartomány kibővíthető úgy, hogy egy, tartománybeli elemi cella egy élszomszédos celláját is hozzávesszük a tartományhoz

Egy ilyen tartományt határoló éleket egy tetszőleges határmenti csúcsból pozitív irányban végigjárva egy zárt utat kapunk. Az ezen zárt utat jellemző szót nevezzük a tartomány egy *határának*.



(A $k_1 k_2 \dots k_m$ és $l_1 l_2 \dots l_s$ szavakat egymás ciklikus permutáltjának nevezzük, ha $m = s$ és $l_1 l_2 \dots l_s = k_{i+1} k_{i+2} \dots k_m k_1 \dots k_i$ valamilyen $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ -re.)

- bármely $k_1 k_2 \dots k_m$ szóból képezhetjük a szó bármely ciklikus permutáltját
- a $k_1 k_2 \dots k_m$ szóba bárhová beszúrhatunk egy aa, bb vagy cc részletet, és ilyeneket ki is vehetünk (tehát képezhetjük például az $aak_1 k_2 \dots k_m$, $k_1 k_2 b b k_3 \dots k_m$ vagy $k_1 k_2 \dots k_m c c$ szavakat, és visszafelé)
- a $k_1 k_2 \dots k_m$ szóba bárhová beszúrhatjuk vagy elvehetjük a σ szót, ahol σ az $ababcacabc$ szó egy ciklikus permutáltja

$$ab \mapsto bcacabcbcabab \mapsto bcacabcbcababb \mapsto cbcababbbbacab$$

transzformációk mind megengedettek (rendre egy σ , bb beszúrása, majd egy ciklikus permutáció).

Könnyen ellenőrizhető, hogy $\sim$ egy ekvivalenciareláció, azaz minden $\alpha, \beta, \gamma \in W$ -re teljesül, hogy

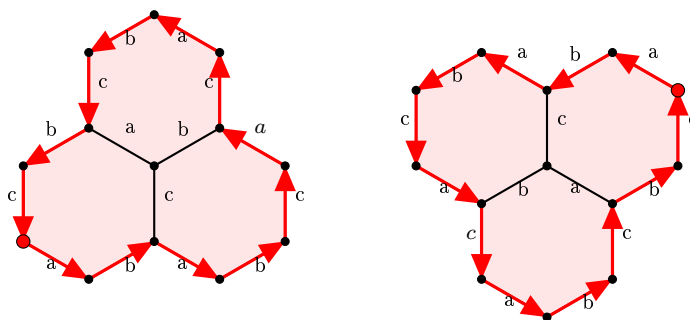
- $\alpha \sim \alpha$ (reflexivitás)
- ha $\alpha \sim \beta$, akkor $\beta \sim \alpha$ (szimmetria)
- ha $\alpha \sim \beta$ és $\beta \sim \gamma$, akkor $\alpha \sim \gamma$ (transzitivitás)

A reflexivitás áll, hiszen α -ból például egy aa -t beszúrva majd elvéve ugyanonnan, ismét α -t kapjuk. A szimmetria látszik abból, hogy a megengedett transzformációk mindegyike visszafordítható, azaz ha α áttranszformálható β -ba, akkor visszafelé is megtehető ez. A transzitivitás következik abból, hogy ha α áttranszformálható β -ba és β a γ -ba, akkor α -t áttranszformálhatjuk először β -ba, majd γ -ba, és ezek összetétele α -t γ -ba viszi.

A reláció hasznát a következő állítás adja: legyen R egy tartomány, amely lefedhető T_2 alakú csempékkel, és legyen π az R határa. Jelölje ϵ az üres szót. Azt állítjuk, hogy ekkor $\pi \sim \epsilon$.

Bizonyítás. (*) Tegyük fel, hogy az R tartomány q db T_2 -vel fedhető le. Az állítást q szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk.

Ha $q = 1$, akkor R maga is egy T_2 tartomány. Könnyen ellenőrizhető, hogy egy T_2 kétféle, egymásba eltolással nem vihető orientációban helyezhető a rácsra, és ezek közül mindkettőnek bármely határa az $ababcacabc$ szó egy ciklikus permutáltja:

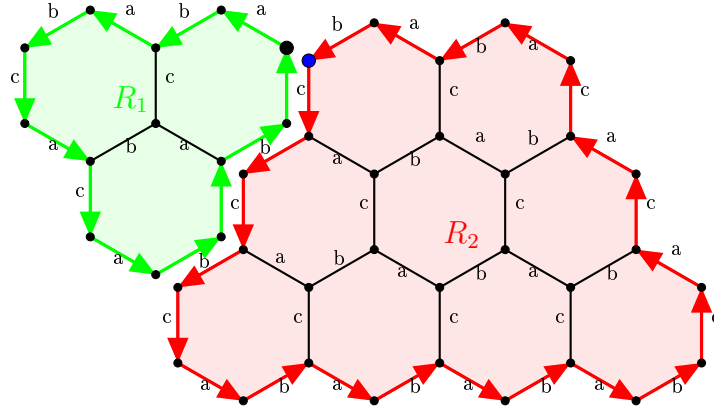


Ezek szerint $q = 1$ -re az R maga is egy T_2 , azaz határa az $ababcacabc$ szó egy permutáltja. Ez megengedett transzformációval elvehető, így az üres szót kapjuk,

tehát $\pi \sim \epsilon$.

Tegyük fel, hogy az R tartomány lefedhető $q \geq 2$ darab T_2 csempével, és a $q - 1$ db ilyenl lefedhető tartományok bármely π' határára $\pi' \sim \epsilon$. Vegyünk egy olyan elemi hatszögcellát R -ben, melynek van olyan élszomszédos cellája, amely már nincs R -ben (ilyen van, mivel R korlátos). Legyen ez a cella az R_1 tartomány, és legyen $R_2 = R \setminus R_1$. Az indukciós feltevés szerint az R_1 és R_2 tartományok π_1 és π_2 határait $\pi_1 \sim \epsilon, \pi_2 \sim \epsilon$.

Vegyük az R_1 és R_2 egy-egy határát. A két határ által leírt utak az R egy körüljárásának minden élét pontosan egyszer tartalmazzák, kivéve az R_1 -et R_2 -től elválasztó éleket, mert ezeket összesen kétszer tartalmazzák, azonban ezeket eltérő sorrendben.



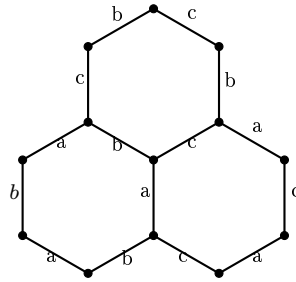
Az ábrán az R_1 körbejárása a közös éleket bcb sorrendben, az R_2 körüljárása $cbcb$ sorrendben járja körbe. Azaz a kékkel jelölt csúcsból indulva az R_1 határa egy $\tau_1 bcb$ alakú szó, az R_2 határa pedig egy $cbcb\tau_2$ alakú szó valamely $\tau_1, \tau_2 \in W$ -re. Ha a két szót egymás mögé írjuk, akkor egy $\tau_1 bcbcbcb\tau_2$ alakú szót kapunk, ami átalakítható a $\tau_1\tau_2$ szóvá (sorban cc, bb, cc, bb elvételeével középről). Ez a szó éppen az R tartomány határa. Tehát az R tartomány π határára akkor lesz $\pi \sim \epsilon$, ha az R_1 és R_2 tartományok π_1, π_2 határainak összetételéből képzett $\pi_1\pi_2$ szóra $\pi_1\pi_2 \sim \epsilon$.

Ezt általánosan is megtehetjük: ha az R_1 és R_2 közös éleit egy útnak vesszük, akkor annak egyik végpontjából körbejárva a két komponenst, majd a kapott szavakat egybeírva az R tartomány határát kapjuk.

Azaz elég belátunk, hogy ha $\pi_1 \sim \epsilon, \pi_2 \sim \epsilon$, akkor ezeket összeírva $\pi_1\pi_2 \sim \epsilon$. Ehhez fontoljuk meg, milyen utakat határozhat meg egy $\alpha \sim \epsilon$ szó: mivel α (vagy α egy transzformációkkal bővített szava) felépül az üres szóból aa típusú, $ababcacabcb$ típusú szavak és ciklikus permutációk egymásutánjából, ezért az α olyan utat ad meg, mely előáll T_2 -k határaiból és egymás utáni azonos élekből álló utakból álló

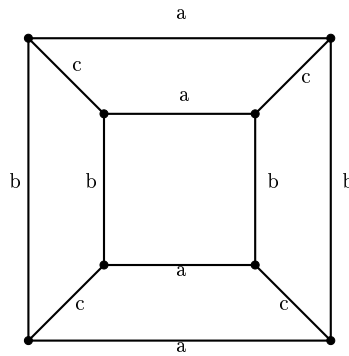
utak összetételeként, továbbá zárt. Hasonlóan ha van egy ilyen tulajdonságú út, akkor az azt megadó π szóra $\pi \sim \epsilon$, mivel ezeket a komponenseket egyenként elvehetjük a szóból. Két ilyen szó egymás után való írása annak felel meg, hogy a megfelelő utakat egymás után tesszük meg. Mivel az utak zártak, ezért két ilyen tulajdonságú út összetétele is így épül fel, tehát az összetételből származó szó is üres szóvá transzformálható. Ezzel beláttuk az indukciós lépést. $\square$

Legyen Γ egy olyan végtelen hatszögrács, melynek éleit úgy jelöljük, hogy minden cella határa $ababab, bcbcbc, cacaca$ egyike legyen és minden csúcsból egy-egy a, b, c él indul:



Ebben a rácsban kétféle csúcs van: az egyik fajta csúcs körül az a, b, c -vel jelölt élek pozitív irányban következnek ilyen sorban, a másik fajtánál negatív irányban. Ezeket rendre pozitív és negatív csúcsoknak nevezzük.

Továbbá legyen Γ' a következő, a, b, c -vel jelölt élekkel rendelkező gráf:



Az eredeti hatszögrácshoz hasonlóan Γ, Γ' -ben is értelmezhetőek utak, melyeket adott kezdőpont mellett szavak adnak meg. Továbbá Γ -ban tartományok is

értelmezhetők. A Γ cellái közül megkülönböztetünk ab -, bc - és ca -hatszögeket, melyek a cellákat határoló élekre utalnak.

Definiálni fogunk egy olyan p függvényt, mely minden szóhoz, mely zárt utat ad meg Γ -ban, rendel egy egész számokból álló rendezett számhármast. Először legyen s egy olyan út, mely Γ -ban olyan zárt utat ad meg, mely egy élt sem használ kétszer. Ekkor minden meglátogatott csúcsot csak egyszer használhat, kivéve a kezdő- és végpontot, azaz belátható, hogy egy tartományt jár körbe. Ha a körbejárás pozitív irányba történik, akkor minden tartománybeli cellához rendeljünk 1-et, ha negatív irányba, akkor -1-et. Ekkor $p(s) = (l_{ab}, l_{bc}, l_{ca})$, ahol l_{ab} az ab -cellákba írt számok összege (ez egy végtelen összeg, de csak véges sok tag nem 0, tehát értelmezhető). Az l_{bc}, l_{ca} értéke is hasonlóan van definiálva.

Ha az s út üres út, akkor $p(s) = (0, 0, 0)$ legyen.

Legyen most s egy olyan zárt út, mely egy élt többször is használ. Ha egy élen közvetlenül egymás után kétszer is átmegy, akkor ezt a részletet hagyjuk el az útból. Egyébként legyenek az út által meglátogatott csúcsok sorban $A_1, A_2, \dots, A_n$, hogy $A_1 = A_n$ (mivel s zárt). Ekkor s -et két kisebb útra osztjuk a következőképp: ha a kezdő csúcs az út közepén is szerepel (azaz van olyan $1 < i < n$ egész, melyre $A_1 = A_i$), akkor az út a csúcsokat nézve $A_1 x A_1 y A_1$ alakú, mely szétosztható az $s_1 = A_1 x A_1$ és $s_2 = A_1 y A_1$ utakra, melyek maguk is zártak. Ha a kezdő csúcs nem szerepel az út közepén, akkor van olyan másik csúcs, melyet az út kétszer is meglátogat (mivel valamelyik élen kétszer is végigmegy, így annak végpontjait többször is meglátogatta). Legyen i az a legkisebb, 1-nél nagyobb egész, melyre van $j > i$, melyre $A_i = A_j$, azaz az A_i csúcsot többször is meglátogatja az út. Ekkor az s út $x A_i y A_i z$ alakú (a csúcsok sorrendjében nézve), mely szétbontható az $s_1 = x A_i z$ és az $s_2 = A_i y A_i$ utakra (ezek zártak, mert s is az).

Ez az algoritmus az s utat két zárt útra bontja, melyek s -nél szigorúan rövidebbek. A kapott utak tovább bonthatók kisebb utakra (egymás után következő azonos élek elhagyásával együtt), kivéve, ha már nem tartalmaznak ismételt éleket vagy üresek. Ez az algoritmus akkor áll meg, ha az s utat olyan $s_1, s_2, \dots, s_k$ utakra bontjuk, melyek mindegyike egy adott élt csak egyszer tartalmaz vagy üres. Természetesen az algoritmusból adódóan a felbontás egyértelmű. Ilyenkor legyen $p(s) = p(s_1) + p(s_2) + \dots + p(s_k)$, ahol az összeadás komponensenként történik.

Definiálunk egy olyan p' függvényt is, mely a Γ' -ben zárt utakhoz rendeli a $\{0, 1\}$ számok egyikét. Az üres úthoz p' is a 0-t rendeli.

Legyen s olyan zárt út Γ' -ben, amely egy élt sem használ kétszer. Tekintsük Γ' csúcsait egy kocka csúcsainak, éleit a kocka éleinek. Ekkor az s által leírt út körbefoglal néhány lapot. A $p'(s)$ érték ezen lapok száma modulo 2 (mivel a kockának 6 lapja van, nem számít a paritás szempontjából, hogy a közrefogás melyik irányból történik). Ha s -ben többször is szerepelnek élek, akkor a Γ -beli

esethez hasonlóan s felbontható $s_1, s_2, \dots, s_k$ utakra, melyek üresek vagy éliszméltés nélküliek, ekkor $p'(s) = p'(s_1) + p'(s_2) + \dots + p'(s_k) \pmod{2}$.

Vegyünk egy $\alpha \in W$ szót. Ehhez a szóhoz legyen $\gamma(\alpha)$ egy α által megadott, pozitív csúcsból induló út, és tegyük fel, hogy ez zárt. Mivel bármely 2 pozitív csúcsot olyan eltolással lehet egymásba vinni, mely az ab -, bc - és ca -hatszögeket azonos határu hatszögekbe viszi, ezért bármely 2 ilyen úthoz p ugyanazt rendeli, azaz $p(\gamma(\alpha))$ jól definiált. Ha egy negatív csúcsból induló utat nézünk, amit α ad meg, akkor ehhez p a $p(\gamma(\alpha))$ (tagonként vett) ellentettjét rendeli, mivel az út ugyanolyan tartományokat vesz körbe fordított irányítással.

Legyen ugyanígy γ' az α által megadott út Γ' -ben, és tegyük fel, hogy zárt. Bármely 2 ilyen úthoz p' ugyanazt rendeli, hiszen a kocka megfelelő forgatásával vagy tükrözésével a két út egymásba megy, azaz $p'(\gamma'(\alpha))$ is jól definiált.

Először belátjuk, hogy ha α zárt utat ad meg Γ -ban, és $\beta \sim \alpha$, akkor β is zárt utat ad Γ -ban. A feltétel azt jelenti, hogy β előáll az α szóból aa , $ababcacabcbc$ hozzáadások és elvételek illetve ciklikus permutációk által. Könnyen ellenőrizhető, hogy Γ -ban aa és $ababcacabcbc$ zárt utakat adnak, továbbá egy zárt út szavának ciklikus permutációja által adott út is zárt. Mivel α is zárt utat ad, így szükségszerűen β is.

Hasonlóan ha α zárt utat ad meg Γ' -ben, és $\beta \sim \alpha$, akkor β is zárt utat ad meg benne. Ez hasonlóan igazolható, látva, hogy az aa és $ababcacabcbc$ szavak Γ' -ben is zárt utat adnak.

Legyen $\alpha \in W$ olyan szó, hogy α zárt utat ad meg Γ -ban és $p(\gamma(\alpha)) = (l_1, l_1, l_1)$ valamely l_1 egészre, továbbá $\beta \in W$ -re $\alpha \sim \beta$. Tudjuk, hogy β zárt utat ad Γ -ban. Belátható, hogy ekkor $p(\gamma(\beta)) = (l_2, l_2, l_2)$ valamely l_2 egészre: a β szó megkapható az α -ból aa és $ababcacabcbc$ típusú szavak hozzáadásával és elvételével, valamint ciklikus permutálással. Látható, hogy az aa hozzáadás és elvétel, illetve a ciklikus permutálás nem változtat a p -értéken. Az $ababcacabcbc$ a számhármass minden elemét eggyel növeli vagy csökkenti, a kezdőhelytől függően, mivel könnyen ellenőrizhető, hogy $p(\gamma(ababcacabcbc)) = (1, 1, 1)$. Ezzel igazoltuk az állítást.

Legyen az $\alpha \in W$ szó *érdekes* pontosan akkor, ha α zárt utakat ad Γ, Γ' -ben, $p(\gamma(\alpha)) = (l_1, l_1, l_1)$ valamilyen l_1 egészre és $l_1 \equiv p'(\gamma'(\alpha)) \pmod{2}$.

Az az állításunk, hogy ha $\alpha \in W$ érdekes és $\alpha \sim \beta$, akkor β is érdekes. Azt már beláttuk, hogy ekkor β is zárt utakat ad Γ, Γ' -ben, és hogy $p(\gamma(\beta)) = (l_2, l_2, l_2)$ valamely l_2 egészre.

Elég belátni, hogy minden, az $\sim$ relációban megengedett transzformáció nem változtat a $p(\gamma(\alpha))$ elemeinek és $p'(\gamma'(\alpha))$ -nak az egymáshoz viszonyított paritásán (különbözőből különböző, azonosból azonos lesz). A ciklikus permutáció és az aa alakú szavak beszúrása egyiket sem változtatja meg. Továbbá mivel

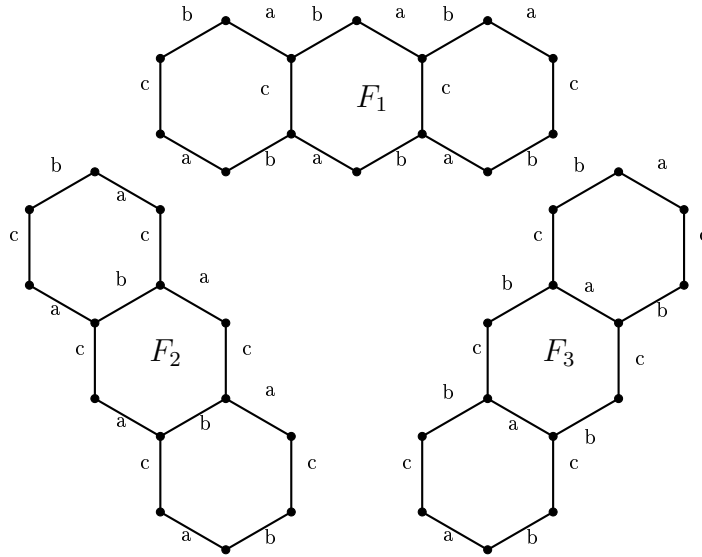
$p(\gamma(ababcacabc)) = (1, 1, 1)$ és $p'(\gamma'(ababcacabc)) = 1$ (ezek könnyen ellenőrizhetők), ezért egy ilyen beszúrása vagy elvétele megőrzi a kongruenciát. Tehát β is érdekes lesz.

Legyen R egy olyan tartomány a hatszögrácson, amely lefedhető T_2 csempékkel, és legyen π az R határa. Beláttuk, hogy ekkor $\pi \sim \epsilon$. Mivel ϵ zárt utakat ad Γ, Γ' -ben, $p(\gamma(\epsilon)) = (0, 0, 0)$ és $p'(\gamma'(\epsilon)) = 0$, ezért ϵ érdekes. A fentiek miatt ekkor π is érdekes, azaz zárt utakat ad Γ, Γ' -ben, $p(\gamma(\pi)) = (l, l, l)$ valamilyen l egészre és $l \equiv p'(\gamma'(\pi)) \pmod{2}$.

Definiáljuk az f_1, f_2, f_3 szavakat a következőképp:

$$f_1 = abababcabababc, \quad f_2 = cacabcacacab, \quad f_3 = bcbcbcabcbcbca$$

Ezek a következő, F_1, F_2, F_3 tartományok határai:



Állításunk az, hogy az f_i szavakra $f_i \not\sim \epsilon$. Ha például $f_1 \sim \epsilon$, akkor f_1 érdekes lenne. Az f_1 valóban zárt utakat ad Γ, Γ' -ben, de ezekre $p(\gamma(f_1)) = (0, 0, 0)$ és $p'(\gamma'(f_1)) = 1$, tehát f_1 nem érdekes, ellentmondás. Hasonlóan ellentmondást kapunk f_2 -re és f_3 -ra is.

Legyen az R tartomány, π az R határa és tegyük fel, hogy R lefedhető pontosan 1 db F_i alakú csempével (ahol $i = 1, 2, 3$) és néhány darab T_2 -vel. Ekkor belátjuk, hogy $\pi \sim f_i$. A bizonyítás teljes indukcióval történik a lefedésben részt vevő T_2 alakú csempék számán, a (*) bizonyításhoz hasonlóan. Ha 1 db ilyen csempe van,

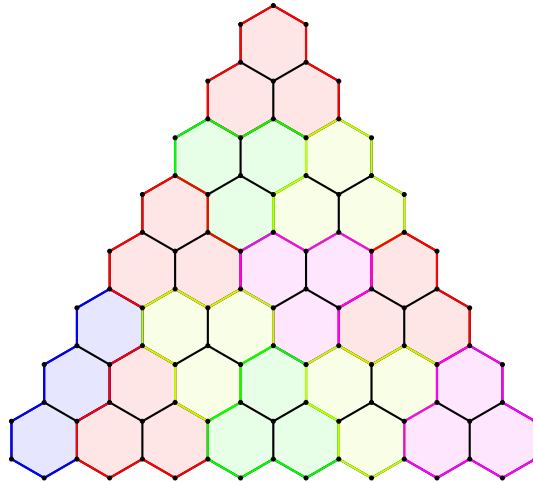
akkor a tartomány felosztható at F_i és a T_2 részre. Az előző bizonyítással analóg módon megmutatható, hogy ha F_i határa f_i , a T_2 -é pedig σ , akkor az R határa $f_i\sigma$ alakú vagy azzá transzformálható ($\sim$ alatt megengedett módon). Tehát elég belátnunk, hogy $f_i\sigma \sim f_i$. Az $f_i\sigma$ által leírt út a hatszögrácsban felbomlik aa -típusú és $ababcacabcbc$ -típusú utakra, illetve egy f_i -re. Az előbbiek a transzformációval eltüntethetőek, tehát $f_i\sigma \sim f_i$.

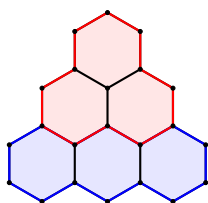
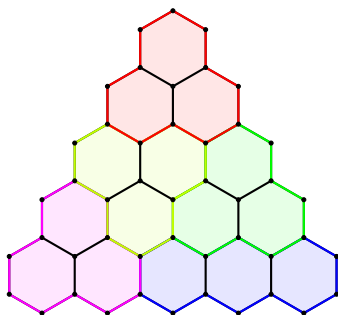
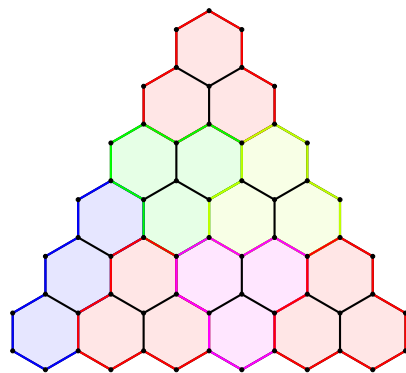
Ha legalább két T_2 van a felbontásban, akkor két részre oszthatjuk R -t a csempék mentén. Legyenek a részek R_1 és R_2 , hogy az f_i az R_1 részben van. Ekkor R_1 határa $\rho_1 \sim f_i$ az indukciós feltevés miatt, R_2 határa pedig $\rho_2 \sim \epsilon$, mivel R_2 lefedhető T_2 -kel. Ekkor R határa $\rho_1\rho_2$ alakú. Mivel $\rho_1 \sim f_i$ és $\rho_2 \sim \epsilon$, ezért a $\rho_1\rho_2$ által generált út felbomlik egy f_i -re és aa - illetve $ababcacabcbc$ típusú utakra, melyek közül az utóbbiak a transzformációkkal eltüntethetőek, azaz $\rho_1\rho_2 \sim f_i$.

Ennek következménye, hogy ha egy R tartomány lefedhető pontosan 1 db F_i alakú csempével és néhány T_2 -vel, akkor nem fedhető le csak T_2 csempékkel: ha R határa π , akkor az első esetben $\pi \sim f_i$, a másodikban $\pi \sim \epsilon$, ami a $\sim$ tranzitivitása miatt azt jelenti, hogy $f_i \sim \epsilon$, amiről megmutattuk, hogy nem áll (mert ekkor f_i érdekes szó lenne).

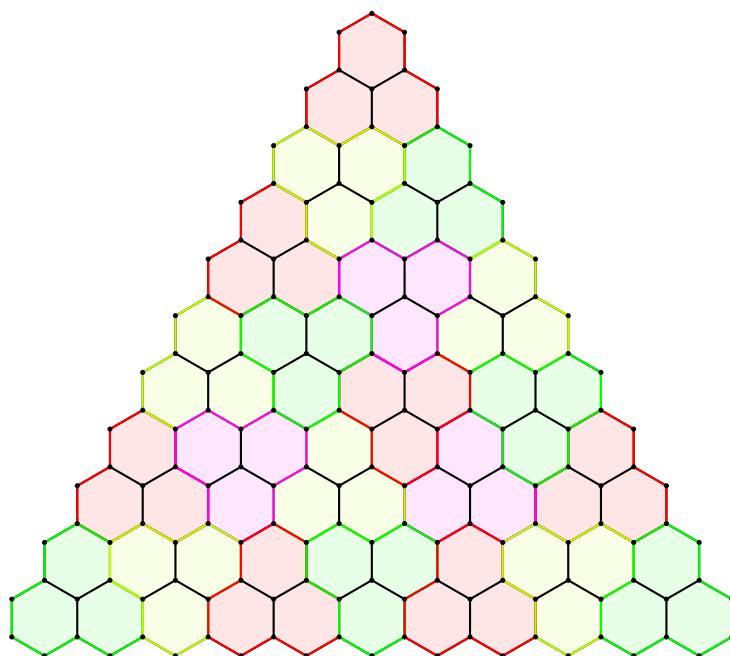
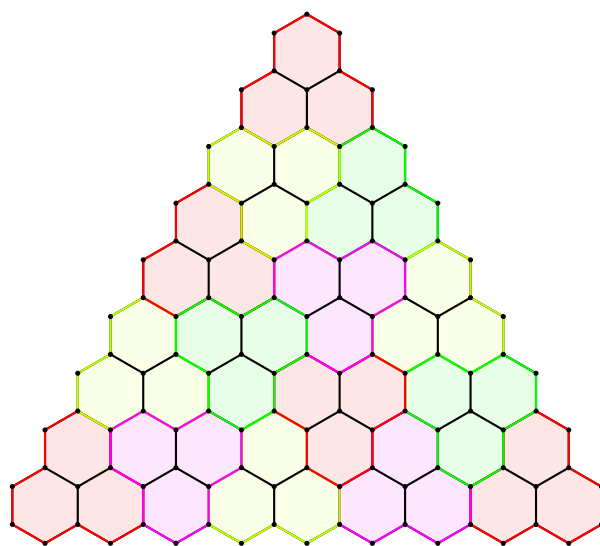
A T_k tartomány $\frac{k(k+1)}{2}$ hatszögből áll, ami nem osztható 3-mal, ha $k \equiv 1 \pmod{3}$. Tehát ekkor T_k nem lefedhető T_2 csempékkel, mivel azok 3 cellából állnak.

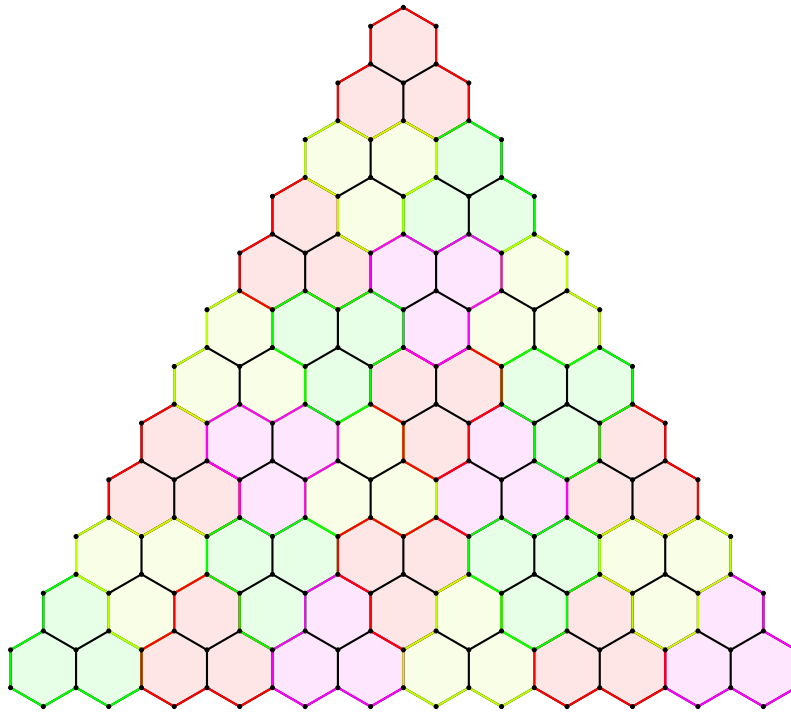
Az $2 \leq k \leq 12$ esetben a T_3 , T_5 , T_6 és T_8 lefedhetők néhány T_2 -vel és pontosan 1 F_i -vel, tehát nem fedhetőek le csak T_2 -vel:



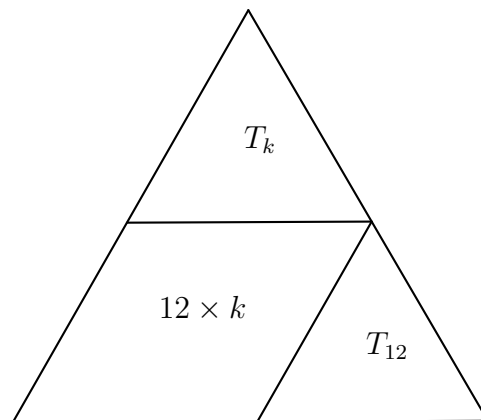


Azonban T_2 , T_9 , T_{11} és T_{12} lefedhetőek csak T_2 csempékkel (T_2 triviálisan):

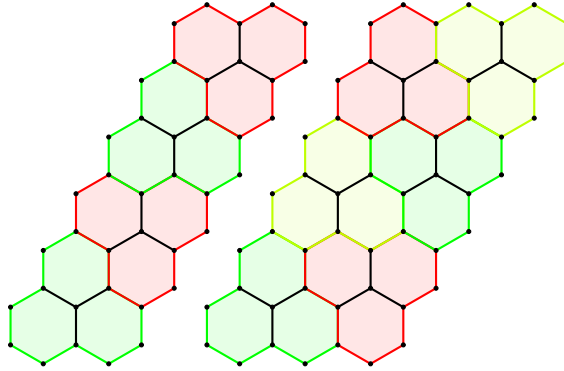




A feladat befejezéséhez nézzünk egy T_{k+12} -t: ennek felső sarkába helyezhetünk egy T_k -t, jobb alsó sarkába pedig egy T_{12} -t. A kimaradó rész egy $12 \times k$ -s paralelogramma:



A $12 \times k$ -s paralelogrammát 2 db $6 \times k$ -s paralelogrammára osztjuk. Mivel minden $k \geq 2$ egész előáll $2x + 3y$ alakban, ahol x, y nemnegatív egészek (ez belátható úgy, hogy a 2 és 3 triviálisan előállnak, $k \geq 4$ -re pedig a $k - 2$ -t kiegészítjük egy kettessel), ezért a $6 \times k$ -s paralelogramma lefedhető x db 6×2 -es és y db 6×3 -as paralelogrammával, amelyek lefedhetők T_2 -vel:



Azaz T_k bármely csempézése kiterjeszthető T_{k+12} egy csempézésére csak T_2 csempék felhasználásával. Így ha $k \equiv 3, 5, 6, 8 \pmod{12}$, akkor P_3, P_5, P_6, P_8 lefedésének kiterjesztésével T_k is lefedhető T_2 csempékkel és pontosan 1 F_i csempével, tehát nem fedhető le csak T_2 csempével. Ha viszont $k \equiv 0, 2, 9, 11 \pmod{12}$, akkor a megfelelő lefedés kiterjesztésével megfelelő T_2 -ket használó lefedést kapunk, tehát ezen esetekben T_k lefedhető csak T_2 csempékkel. $k \equiv 1 \pmod{3}$ esetén triviálisan nincs lefedés továbbra sem.

Az n oldalú szabályos háromszögben a feladat szövege szerint alkotott rács egy partícionálása a T_{n+1} lefedése T_2 csempékkel. A fentiek szerint ez akkor tehető meg, ha $n + 1 \equiv 0, 2, 9, 11 \pmod{12}$, azaz $n \equiv 1, 8, 10, 11 \pmod{12}$.